ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 Межвузовский сборник научных трудов 2016

УДК 517.977

Г.Г. Иванов, Г.В. Алферов, П.А. Ефимова
Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф
Университетский проспект, 35
guennadi.ivanov@gmail.com, alferovgv@gmail.com,
yefimovapa@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРЕДЕЛЬНОГО ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Исследуются стационарные системы с векторным управлением, для которых существует неособое преобразование, расщепляющее исходную систему на r независимых подсистем со скалярным управлением, где через r обозначена размерность вектора управления.

Ключевые слова: управляемые системы; векторное управление; стационарные системы.

1. Предварительные замечания

Пусть дана система

$$\dot{x} = A(x) + B(x, \mu)u, \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор фазовых переменных, A и B – непрерывные по совокупности аргументов матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, u – ерный вектор управляющих воздействий.

Предположим, что система (1) линейно стабилизируема при помощи управления $u = N^T x$, где N – постоянная размерности $n \times r$ матрица; и что существует неособое преобразование $x = G(y)$, расщепляющее систему (1) на r независимых подсистем со скалярным управлением вида

$$\dot{y}^j = A_j y^j + g^j(y^j) + (b^j + \mu C_j y^j + h^j(y^j))u_j, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

где y^j – вектор размерности n_j, A_j и C_j – постоянные матрицы размерности $n_j \times n_j$, b^j – n_j-мерный постоянный вектор, $g^j(y^j)$ и $h^j(y^j)$ – n_j-мерные непрерывно дифференцируемые вектор-функции такие, что при $\|y^j\| \to 0$

$$\|g^j(y^j)\| = o(\|y^j\|), \quad \|h^j(y^j)\| = o(\|y^j\|),$$

μ – малый параметр, u_j – скалярное управление, $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$.

Поскольку система (1), по предположению, линейно стабилизируема, то и система (2) также линейно стабилизируема, т.е. существует такой набор векторов m^j размерности n_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, что если в системе (2) положить

$$u_j = m^{j^T} y^j, \tag{3}$$

то нулевое решение получившейся системы будет экспоненциально устойчивым. Тогда, как следует из [1], существуют пары положительно определенных квадратичных форм

$$v_j(y^j) = y^{j^T} V_j y^j \quad \text{и} \quad w_j(y^j) = y^{j^T} W_j y^j,$$

связанные на решениях системы

$$\dot{y}^j = (A_j + b^j m^{j^T}) y^j, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{4}$$

соотношениями

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{(4)} v_j(y^j) = -w_j(y^j), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Замкнем систему (2) управлением гистерезисного типа, положив

$$u_j = \phi_j(\sigma_j), \quad j = 1, \dots, r, \qquad 5)$$

где

$$\phi_j(\sigma_j) = -1, \sigma_j < l_j + 1, \sigma_j > -l_j,$$

l_j – положительные постоянные, $\sigma_j = -b^{j^T} V_j y^j$.

2. Релейная стабилизация стационарных систем с векторным управлением в случае формирования управляющего сигнала по линейному закону

Исходя из вышесказанного, для системы (2)–(5) имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть система (2) линейно стабилизируема при помощи управления (3). Тогда при достаточно малых значениях параметров μ и l_j, $j = 1, 2, \dots, r$, справедливы утверждения:

1) управление (5) решает задачу релейной стабилизации системы (2);

2) система (2)–(5) имеет r-параметрическое семейство, по крайней мере, почти периодических устойчивых по Ляпунову решений $f(t; \xi_1, \dots, \xi_r)$, $\xi_j \in (-\infty, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, r$;

3) множество

$$M = \bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_r \in (-\infty, +\infty)} f(t; \xi_1, \dots, \xi_r)$$

является асимптотически устойчивым инвариантным множеством системы (2)–(5).

Доказательство. Поскольку каждая из подсистем системы (2)–(5) совпадает по структуре с системой, исследованной в [2], то все утверждения, полученные в этой работе, останутся справедливыми и для каждой из подсистем системы (2)–(5). Тогда, как следует из [1] и [2], при достаточно малых значениях параметров μ и l_j, $j = 1, 2, \dots, r$, управление (5) будет решать задачу релейной стабилизации системы (2), и каждая из подсистем системы (2)–(5) будет иметь однопараметрическое семейство периодических решений $f^j(t+\xi_j)$, $\xi_j \in (-\infty,+\infty)$, $j=1,\ 2,\dots\ ,\ r$, с общей орбитой и периодом ω_j. Таким образом, для того чтобы и система (2)–(5) имела периодические решения, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы все ω_j были попарно соизмеримы, в противном случае система (2)–(5) будет иметь r-параметрическое семейство почти периодических решений. Эти почти периодические решения $f^T(t;\xi_1,\dots,\xi_r)=\left(f^{1^T}(t+\xi_1),\dots,f^{r^T}(t+\xi_r)\right)$ будут оставаться устойчивыми по Ляпунову, но орбитально асимптотически устойчивыми, вообще говоря, являться не будут.

Рассмотрим множество

$$M = \bigcup_{\xi_1,\dots,\xi_r\in(-\infty,+\infty)} f(t;\xi_1,\dots,\xi_r).$$

Ясно, что M является инвариантным множеством системы (2)–(5), как теоретико-множественное объединение решений этой системы. В силу того, что каждое из решений j-й подсистемы системы (2)–(5) является орбитально асимптотически устойчивым и обладает асимптотической фазой, заключаем, что каждое из решений системы (2)–(5), начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, будет асимптотически приближаться к одному из решений, принадлежащих множеству M, что и доказывает асимптотическую устойчивость этого множества.

3. Релейная стабилизация стационарных систем с векторным управлением в случае формирования управляющего сигнала по нелинейному закону

Теперь исследуем ситуацию, возникающую в случае формирования управляющего сигнала по нелинейному закону.

Утверждение 2. Пусть система (2) линейно стабилизируема при помощи управления (3). Тогда при любом фиксированном μ и достаточно малых значениях параметров l_j имеют место следующие утверждения:

1) управление

$$u_j = \phi_j(\sigma_j), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

где $\sigma_j = -b^{0j^T}(y^j)V_j y^j, \qquad b^{0j}(y^j) = b^j + \mu C_j y^j + h^j(y^j)$,

решает задачу релейной стабилизации системы (2);

2) система (2)–(6) имеет r-параметрическое семейство, по крайней мере, почти периодических устойчивых по Ляпунову решений $f(t;\xi_1,\ldots,\xi_r)$, $\xi_j \in (-\infty,+\infty)$, $j = 1, 2, , r$;

3) множество

$$M = \bigcup_{\xi_1,\ldots,\xi_r \in (-\infty,+\infty)} f(t;\xi_1,\ldots,\xi_r)$$

является асимптотически устойчивым инвариантным множеством системы (2)–(6). Доказательство этого утверждения проводится по схеме доказательства утверждения 1 со ссылкой на соответствующие результаты работ [1] и [2].

Заключение

Было проведено исследование стационарных системы с векторным управлением, для которых существует неособое преобразование, расщепляющее исходную систему на независимых подсистем со скалярным управлением. Результаты исследований сформулированы в виде утверждений с приведением схемы их доказательств. Полученные результаты могут быть применены при исследовании управления механических и других управляемых систем [3–23].

Библиографический список

1. *Зубов В.И.* Границы области асимптотической устойчивости. СПб: СПбГУ, 2007. 85 с.

2. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 33–34.

3. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 13–15.

4. Kulakov *F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling And Control Of Robot Manipulators With The Con-

straints At The Moving Objects // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. C.102–105.

5. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С.121–122.

6. *Пичугин Ю.А., Малафеев О.А., Алферов Г.В.* Оценивание параметров в задачах конструирования механизмов роботов-манипуляторов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 141–142.

7. *Алферов Г.В., Кулаков Ф.М., Нечаев А.И., Чернакова С.Э.* Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 168 с.

8. *Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Шарлай А.С.* Кинематические модели манипуляционных роботов // Потенциал современной науки, апрель, 2014. № 2. Липецк. С. 38–41.

9. *Кулаков Ф.М., Алферов Г.В.* Модели манипуляторов для автоматизации сборочных операций. // Современные инновации в науке и технике: сб. тр. IV науч.-практ. конф. Курск, 2014. Т. 2. С. 322–329.

10. *Алферов Г.В.* К расчету динамической модели манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 1996. № 28. С. 6–13.

11. *Кулаков Ф.М., Алферов Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 1995. № 29. С. 92–97.

12. *Неверова Е.Г., Малафеев О.А., Алферов Г.В.* Нелинейная модель управления антикоррупционными мероприятиями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С.445–446.

13. *Neverova E.G., Malafeyev O.A., Alferov G.V., Smirnova T.E.* Model of Interaction between Anticorruption Authorities and Corruption Groups // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. C. 488–490.

14. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Programming The Robot In Tasks Of Inspection And Interception // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. C. 7106713.

15. *Малафеев О.А., Рединских Н.Д., Алферов Г.В.* Модель аукциона с коррупционной компонентой // Вестник Пермского универ-

ситета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. № 1(28). С. 30–34.

16. *Демидова Д.А., Алферов Г.В., Колпак Е.П., Смирнова Т.Е.* Нелинейный процесс взаимодействия между коррумпированной фирмой и отделом по борьбе с коррупцией // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2015. № 47. С. 17–31.

17. *Соколов Л.Л., Шиманчук Д.В., Шмыров А.С.* Задача перехвата небесного тела с использованием коллинеарной точки либрации // Устойчивость и процессы управления: матер III междунар. конф. 2015. С. 153–154.

18. *Shmyrov A., Shymanchuk D., Sokolov L.* The Interception Problem Of A Celestial Body With The Use Of The Collinear Libration Points // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 129–131.

19. *Korolev V., Pototskaya I.* Problems Of Stability With Respect To A Part Of Variables // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. С. 7106739.

20. *Королев В.С., Потоцкая И.Ю.* Условия устойчивости состояний движения // Инновации в науке. 2015. № 51–1. С. 29–43.

21. *Королев В.С.* Задачи оптимального маневрирования космических аппаратов для инспектирования или обслуживания системы тел // Исследования наукограда. 2015. № 2(12). С. 18–23.

22. *Королев В.С.* Вопросы устойчивости положений равновесия // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 24. С. 13–20.

23. *Королев В.С.* Устойчивость решений динамических систем по части переменных // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 19. С. 14–22.

24. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 2014. № 46. С. 20–30.

25. *Ефимова П.А.* Динамическая модель космического манипуляционного робота // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2, № 1. С. 173–179.

26. *Ефимова П.А.* Кинематическая модель космического манипуляционного робота // Молодой ученый. 2015. № 6 (86). С. 1–7.